

7 In un sistema di riferimento cartesiano Oxy , l'equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo, rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Si dimostri che le rette tangenti nei suoi vertici sono perpendicolari alle bisettrici dei quadranti del sistema di riferimento considerato.

7 In un sistema cartesiano Oxy , possiamo scrivere l'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti come una funzione $y = f(x) = \frac{k}{x}$, con $k \neq 0$ e dominio $x \neq 0$.

I vertici della iperbole si possono trovare intersecando la funzione con la bisettrice del primo e terzo quadrante se $k > 0$, con la bisettrice del secondo e quarto quadrante se $k < 0$. Distinguiamo i due casi.

Caso $k > 0$

Le coordinate dei vertici sono:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{k}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{x} \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = k \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{k} \\ y = -\sqrt{k} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{k} \\ y = \sqrt{k} \end{cases}$$

quindi $V_1(-\sqrt{k}; -\sqrt{k})$ e $V_2(\sqrt{k}; \sqrt{k})$.

Le rette tangenti nei vertici hanno equazione $y - f(x_V) = f'(x_V)(x - x_V)$, i coefficienti angolari delle rette tangenti assumono il valore della derivata prima calcolata nelle ascisse dei vertici.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \left(-\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}, \text{ con } k > 0 \text{ e } x \neq 0.$$

Per $x_V = \pm\sqrt{k}$, abbiamo $f'(\pm\sqrt{k}) = -\frac{k}{(\pm\sqrt{k})^2} = -\frac{k}{k} = -1$.

Le rette tangenti in $x = \pm\sqrt{k}$, $k > 0$, hanno coefficiente angolare -1 e sono entrambe perpendicolari alla retta $y = x$ che ha coefficiente angolare 1 , reciproco e opposto di -1 .

Caso $k < 0$

In modo analogo si dimostra che le coordinate dei vertici sono $V_3(-\sqrt{-k}; \sqrt{-k})$ e $V_4(\sqrt{-k}; -\sqrt{-k})$, che $f'(x) = \left(-\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$, con $k < 0$ e $x \neq 0$. Inoltre, per $x_V = \pm\sqrt{-k}$, abbiamo

$$f'(x) = (\pm\sqrt{-k})' = -\frac{k}{(\pm\sqrt{-k})^2} = -\frac{k}{-k} = 1.$$

Anche in questo caso, le rette tangenti sono entrambe perpendicolari alla retta $y = -x$ che ha coefficiente angolare -1 , reciproco e opposto di 1 .